Sergio Yansen Núñez

Diferenciabilidad

1) Sea $f(x,y)=\begin{cases} \frac{(x-4)y^5}{(x-4)^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(4,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(4,0) \end{cases}$

¿Es f diferenciable en $(4,0)$?

2) Sea $f(x,y)=\begin{cases} \frac{|x||y|}{|x|+|y|} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$

a) ¿Es f continua en $(0,0)$?

b) ¿Es f diferenciable en $(0,0)$?

3) Sea $f(x,y)=\begin{cases} \frac{x^2\sqrt[3]{y}}{x^3+y} & \text{si } x^3+y\neq 0 \\ 0 & \text{si } x^3+y=0 \end{cases}$

a) ¿Es f continua en $(0,0)$?

b) ¿Es f diferenciable en $(0,0)$?

4) Sea $f(x,y)=\begin{cases} \frac{(x-3)(y+3)}{\sqrt{(x-3)^2+(y+3)^2}} & \text{si } (x,y)\neq(3,-3) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(3,-3) \end{cases}$

a) ¿Es f continua en $(3,-3)$?

b) ¿Es f diferenciable en $(3,-3)$?

5) Sea $f(x,y)=\begin{cases} \frac{sen((x-2)^2(y-1))}{\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}} & \text{si } (x,y)\neq(2,1) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(2,1) \end{cases}$

a) ¿Es f continua en $(2,1)$?

b) ¿Es f diferenciable en $(2,1)$?

$$\frac{\partial f}{\partial x}(4,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(4+h,0) - f(4,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(4,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(4,h) - f(4,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\left| f(4+h,k) - f(4,0) - \left(\frac{\partial f}{\partial x}(4,0)\cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(4,0)\cdot k\right)\right|}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$: \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\frac{|h|\,|k|^5}{h^2+k^2}}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|h|\,|k|^5}{(h^2+k^2)^{3/2}}$$

$$0 \leq \frac{|h|\,|k|^5}{(h^2+k^2)^{3/2}} \leq \frac{|h|\,|k|^5}{|k|^3} = |h|\,k^2 \quad ; \quad k\neq 0$$

$$\searrow 0 \swarrow$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} 0 = \lim_{(h,k)\to(0,0)} |h|\,k^2 = 0$$

Por Teorema de acotamiento; $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|h|\,|k|^5}{(h^2+k^2)^{3/2}} = 0$

Luego, f es diferenciable en $(4,0)$.

2) a) i) $(0,0) \in \text{Dom} f$

ii) análisis de $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

$$0 \leq \frac{|x||y|}{|x|+|y|} \leq \frac{|x||y|}{|x|} = |y| \quad ; x \neq 0$$

$\searrow 0 \swarrow$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} 0 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} |y| = 0$$

Por Teorema de acotamiento, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

iii) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$

$\therefore$ f es continua en $(0,0)$.

b) $$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\left| f(h,k) - f(0,0) - \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\cdot k\right) \right|}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\frac{|h||k|}{|h|+|k|}}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|h||k|}{(|h|+|k|)\sqrt{h^2+k^2}}$$

aproximación a $(0,0)$ mediante familia de rectas $k = mh$

$$\lim_{h\to 0} \frac{|h|\,|mh|}{(|h|+|mh|)\sqrt{h^2+m^2h^2}}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{|m|\,h^2}{|h|(1+|m|)\cdot |h|\cdot \sqrt{1+m^2}}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{|m|\,h^2}{h^2(1+|m|)\sqrt{1+m^2}} = \frac{|m|}{(1+|m|)\sqrt{1+m^2}} \quad \text{(depende de } m\text{)}$$

Luego, no existe el límite

$\therefore$ f no es diferenciable en $(0,0)$

3) a) i) $(0,0) \in \text{Dom } f$

ii) análisis de $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2\sqrt[3]{y}}{x^3+y}$

aproximación a $(0,0)$ mediante familia $y = mx^3$, $m \neq -1$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2\sqrt[3]{mx^3}}{x^3+mx^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3\sqrt[3]{m}}{x^3(1+m)} = \underbrace{\frac{\sqrt[3]{m}}{1+m}}_{\text{depende de } m} \; ; \; m \neq -1$$

$\therefore$ no existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

Por lo tanto, f no es continua en $(0,0)$

b) Como f no es continua en $(0,0)$ entonces f no es diferenciable en $(0,0)$.

) a) i) $(3,-3) \in \text{Dom} f$

ii) análisis de $\lim\limits_{(x,y)\to(3,-3)} f(x,y)$

$$0 \leq \left| \frac{(x-3)(y+3)}{\sqrt{(x-3)^2+(y+3)^2}} \right| = \frac{|x-3||y+3|}{\sqrt{(x-3)^2+(y+3)^2}} \leq \frac{|x-3||y+3|}{|x-3|} = |y+3|$$

$y \neq -3$

$\to 0 \leftarrow$

$$\lim_{(x,y)\to(3,-3)} 0 = \lim_{(x,y)\to(3,-3)} |y+3| = 0$$

Por Teorema de acotamiento, $\lim\limits_{(x,y)\to(3,-3)} f(x,y) = 0$

iii) $\lim\limits_{(x,y)\to(3,-3)} f(x,y) = f(3,-3) = 0$

Luego, f es continua en $(3,-3)$

b) $$\frac{\partial f}{\partial x}(3,-3) = \lim_{h\to 0} \frac{f(3+h,-3) - f(3,-3)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(3,-3) = \lim_{h\to 0} \frac{f(3,-3+h) - f(3,-3)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\left| f(3+h,-3+k) - f(3,-3) - \left(\frac{\partial f}{\partial x}(3,-3)\cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(3,-3)\cdot k\right)\right|}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\frac{|hk|}{\sqrt{h^2+k^2}}}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|h||k|}{h^2+k^2}$$

aproximación a $(0,0)$ mediante familia de rectas $k = mh$

$$\lim_{h\to 0} \frac{|h||mh|}{h^2+m^2h^2} = \lim_{h\to 0} \frac{|m|h^2}{h^2(1+m^2)} = \underbrace{\frac{|m|}{1+m^2}}_{\text{depende de } m}$$

$\therefore$ no existe $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|h||k|}{h^2+k^2}$

Por lo tanto, f no es diferenciable en (3,-3).

5) a) i) $(2,1) \in \text{Dom} f$

ii) análisis de $\lim_{(x,y)\to(2,1)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{\operatorname{sen}((x-2)^2(y-1))}{\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}}$

$$0 \le \left|\frac{\operatorname{sen}((x-2)^2(y-1))}{\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}}\right| \le \frac{(x-2)^2|y-1|}{\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}} \le \frac{(x-2)^2|y-1|}{|x-2|} = |x-2||y-1|$$

$x \neq 2$

$\to 0 \leftarrow$

$$\lim_{(x,y)\to(2,1)} 0 = \lim_{(x,y)\to(2,1)} |x-2||y-1| = 0$$

Por Teorema de acotamiento, $\lim_{(x,y)\to(2,1)} f(x,y) = 0$

iii) $\lim_{(x,y)\to(2,1)} f(x,y) = f(2,1) = 0$

Luego, f es continua en (2,1)

b) $\frac{\partial f}{\partial x}(2,1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h,1) - f(2,1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$

$\frac{\partial f}{\partial y}(2,1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2,1+h) - f(2,1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\left| f(2+h,1+k) - f(2,1) - \left(\frac{\partial f}{\partial x}(2,1)\cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(2,1)\cdot k \right) \right|}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\frac{|\text{sen}(h^2 k)|}{\sqrt{h^2+k^2}}}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|\text{sen}(h^2 k)|}{h^2+k^2}$$

$$0 \le \frac{|\text{sen}(h^2 k)|}{h^2+k^2} \le \frac{h^2|k|}{h^2+k^2} \le \frac{h^2|k|}{h^2} = |k| \quad ; \ h \neq 0$$

$\searrow 0 \swarrow$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} 0 = \lim_{(h,k)\to(0,0)} |k| = 0$$

Por Teorema de acotamiento, $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|\text{sen}(h^2 k)|}{h^2+k^2} = 0$

Luego, f es diferenciable en $(2,1)$.

– Observación: si se responde primero b), entonces como f es diferenciable en $(2,1)$ se tiene que f es continua en $(2,1)$. Con esto, se tiene la respuesta de a).